Inecuaciones de segundo Grado (con una incógnita)

Forma general:

$$P_{(x)} = ax^2 + bx + c \gtrless 0 \quad a \neq 0 \qquad \{a; b; c\} \subset \mathbb{R}$$

Métodos de resolución:

1. Por factorización (puntos críticos)

- Se factoriza el polinomio mediante un aspa simple.

- Se hallan los puntos críticos, igualando cada factor a cero y se ubican en la recta numérica o eje lineal de coordenadas.

- De derecha a izquierda se ubican los signos (+) y menos (-) en forma alternada en cada intervalo.

- Luego, sí $\mathbf{P_{(x)} \geq 0}$; se tomarán los intervalos (+) o positivos y si $\mathbf{P_{(x)} \leq 0}$; se tomarán los intervalos (-) o negativos.

  Ejemplo:

$$x^2 - x - 6 \leq 0$$

1er paso: Factorizar

$$x^2 - x - 6 \leq 0$$

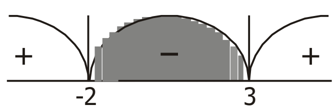
$$\begin{array}{ll} x & -3 \\ x & 2 \end{array}$$

$$\rightarrow \; (x - 3)(x + 2) \leq 0$$

2do paso: Puntos críticos

$$x - 3 = 0 \wedge x + 2 = 0$$
$$\text{P.C.} = \{3; -2\}$$

3er paso: Ubicamos los puntos críticos en la recta numérica y hacemos la distribución de signos.



4to paso: Como $P_{(x)} \leq 0$; tomamos el intervalo negativo.

$$x \in [-2; 3]$$

➲ Problemas resueltos

1. Resolver:

$$x^2 - 11x + 28 > 0$$

Solución:

* Factorizando la inecuación por aspa simple.

$$x^2 - 11x + 28 > 0$$

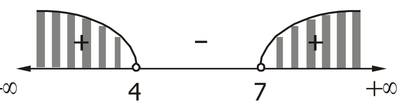
$$\begin{array}{ll} x & -7 \\ x & -4 \end{array}$$

Luego se tendrá: $(x - 4)(x - 7) > 0$

Igualando a cero cada factor se obtendrá los puntos críticos.

$$x - 4 = 0 \rightarrow x = 4$$
$$x - 7 = 0 \rightarrow x = 7$$

Graficando los puntos en la recta numérica real.



luego el conjunto solución estará representado por las zonas positivas, es decir:

$$x \in \langle -\infty ; 4\rangle \cup \langle 7 ; +\infty\rangle$$

2. Resolver:

$$x^2 + 2x - 8 < 0$$

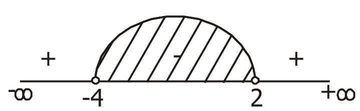
Solución:

Factorizando se obtiene: $(x + 4)(x - 2) < 0$

Determinando los puntos críticos.

$$x + 4 = 0 \rightarrow x = -4$$
$$x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$$

Graficando y aplicando la regla de los signos.



Luego el conjunto solución estará dado en la zona negativa, es decir: $x \in \langle -4; 2\rangle$

3. Resolver:

$$\frac{2}{5}(x+4)(3x-1) \leq 0$$

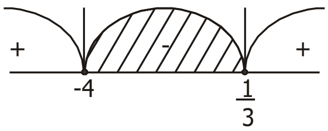
Solución:

multiplicando por 5/2 se tendrá: $(x + 4)(3x - 1) \leq 0$

Luego usamos el criterio de los puntos críticos.

$$x + 4 = 0 \quad \rightarrow \quad x = -4$$
$$3x - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 1/3$$

Como la desigualdad es ≤ 0.



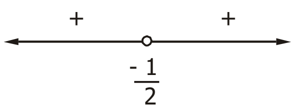
$x \in [-4; \frac{1}{3}]$

4. Discutir:

a) $(2x + 1)^2 > 0$

Solución:

el punto crítico es $-\frac{1}{2}$ no se considera como parte de la solución ya que es > 0.

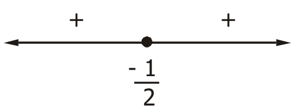


$$x \in IR - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

b) $(2x + 1)^2 \geq 0$

Solución:

el punto crítico es -1/2, se considera como parte de la solución ya que es ≥ 0.



$$\therefore\ x \in IR$$

c) $(2x + 1)^2 < 0$

Solución:

cualquier número real positivo o negativo al elevarlo al cuadrado da como resultado un número positivo, entonces ningún valor real verifica la desigualdad.

$$\therefore\ x \in \phi$$

d) $(2x + 1)^2 \leq 0$

Solución:

en este caso el intervalo es cerrado en consecuencia la desigualdad será posible sólo en el caso que la base sea cero es decir cuando:

$$x = -\frac{1}{2}$$

5. Hallar el menor de los números "M" que cumple la siguiente condición:

$$\forall x \in IR: 4x - x^2 - 12 \leq M$$

Solución:

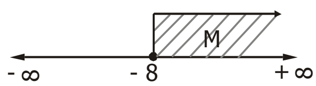
Transponiendo los términos de manera adecuada:

$$x^2 - 4x + 12 + M \geq 0$$

Si se verifica el $\forall\ x \in IR$: y además su primer coeficiente es positivo (1 > 0); entonces el discriminante debe ser menor ó igual a cero, luego tenemos:

$$D = 16 - 4(M + 12) \leq 0$$
$$16 - 48 \leq 4M$$
$$-32 \leq 4M \Leftrightarrow 4M \geq -32$$
$$M \geq -8$$

Graficando:



Del gráfico: $\therefore$ El menor valor de "M" es -8.

Observación

$$P_{(x)} = ax^2 + bx + c$$

$$\{a, b, c\} \subset IR$$

Si tiene: Δ = discriminante

$(\Delta < 0)$ y $(a > 0)$

entonces: $ax^2 + bx + c > 0$

Problemas para la clase

Nivel I

1. Resolver:

$$x^2 - x - 20 < 0$$

a) $x \in \mathbb{R}$
b) $x \in \langle -4; 5\rangle$
c) $x \in \langle -1; 1\rangle$
d) $x \in \langle -\infty; 4\rangle \cup \langle 5; +\infty\rangle$
e) $x \in \langle -\infty; -4\rangle \cup \langle 5; +\infty\rangle$

2. Resolver:

$$x^2 + x - 72 \geq 0$$

a) $x \in \mathbb{R}$
b) $x \in \langle -\infty; -9] \cup [8; +\infty\rangle$
c) $x \in [-7; 6]$
d) $x \in [-7; 6\rangle$
e) $x \in \phi$

3. Resolver:

$$x^2 - 9 \leq 0$$

a) $x \geq 3 \vee x \leq -3$
b) $-3 \leq x \leq 3$
c) $x \geq 3$
d) $x \leq 3$
e) $x \in \mathbb{R}$

4. Resolver:

$$x^2 \leq 49$$

a) $x \in [-7; 7]$
b) $x \in [-1; 1]$
c) $x \in \langle -\infty; -7\rangle \cup [7; +\infty\rangle$
d) $x \in \mathbb{R}$
e) $x \in \phi$

5. Resolver:

$$-x^2 + 7x \geq 0$$

dar su intervalo solución

a) $x \in [0; 7]$
b) $x \in [-7; 7]$
c) $x \geq 7$
d) $x \in [-7; +\infty]$
e) $x \in \langle -\infty; 0\rangle$

6. Resolver:

$$(x - 2)^2 \leq 9$$

a) $x \geq 2$
b) $x \leq 6$
c) $-1 \leq x \leq 5$
d) $x \leq 8$
e) $x \in \mathbb{R}$

7. Resolver:

$$(x - 5)^2 \leq 4$$

a) $x \leq -4$
b) $x \geq 3$
c) $x \leq -1$
d) $x \leq 8$
e) $3 \leq x \leq 7$

8. Resolver:

$$(x^2 - 9)^2 \leq 0$$

a) $x = -3 \vee x = 3$
b) $x \in \mathbb{R}$
c) $x \in \phi$
d) $x \in \mathbb{R} - \{0\}$
e) $x = -9 \vee x = 9$

9. Resolver: $x^2 - 4x + 1 \leq 0$
Indicar su intervalo solución.

a) $x \in [2 - \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3}]$
b) $x \in [-1; 1]$
c) $x \in [-3; 1]$
d) $x \in [2 + \sqrt{3}; +\infty]$
e) $x \in \langle -\infty; 2 + \sqrt{3}]$

10. Resolver:

$$(x - 4)^2 \leq 9$$

a) $1 \leq x \leq 2$
b) $1 \leq x \leq 6$
c) $1 \leq x \leq 7$
d) $1 \leq x \leq 8$
e) $-3 \leq x \leq 3$

Nivel II

1. Resolver:

$$(x + 2)^2 \geq 16$$

a) $x \in \langle -\infty; -6] \cup [2; +\infty\rangle$
b) $x \in [-6; 2]$
c) $x \in [-2; 4]$
d) $x \in \phi$
e) $x \in \mathbb{R}$

2. Resolver:

$$x^2 - 2x + 7 > 0$$

a) $x \in \mathbb{R}$
b) $x \in \phi$
c) $x \in \mathbb{R} - \{1\}$
d) $x \in \mathbb{R} - \{2\}$
e) $x \in \langle 1; 7\rangle$

3. Resolver:

$$x^2 - 6x + 9 < 0$$

a) $x \in \mathbb{R}$
b) $x \in \mathbb{R} - \{0\}$
c) $x \in \mathbb{R} - \{1\}$
d) $x \in \phi$
e) $x \in \langle -\infty; 4\rangle \cup [7; +\infty\rangle$

4. Resolver:

$$x^2 - 6x + 9 > 0$$

a) $x \in \mathbb{R}$ b) $x \in \mathbb{R} - \{3\}$
c) $x \in \phi$ d) $x \in \langle -3; 3\rangle$ e) $x > 3$

5. Resolver:

$$x^2 - 4x + 4 < 0$$

a) $x \in \mathbb{R}$ b) $x \in \mathbb{R} - \{2\}$
c) $x = 2$ d) $x \in \phi$
e) $x \in \langle -\infty; 4\rangle$

6. Resolver:

$$(x + 1)\,(x + 2)\,(x + 3) \leq x^3 + 5x^2 + 10x + 8$$

a) $x \in \langle -\infty; -2\rangle \cup [1; +\infty\rangle$
b) $x \in [-2; 1]$
c) $x \in [1; +\infty\rangle$
d) $x \in \mathbb{R}$
e) $x \in \phi$

7. Resolver:

$$x^2 - 2x - 8 < 0$$

a) $x \in \langle -4; 4\rangle$ b) $x \in \langle -2; 2\rangle$
c) $x \in \langle -3; 3\rangle$ d) $x \in \langle -2; 4\rangle$
e) $x \in \langle -1; 1\rangle$

8. Resolver:

$$(x^2 - 9) \geq 0$$

a) $x \geq 3 \vee x \geq 0$ b) $x \in [-3; 3]$
c) $x \geq 3$ d) $x \leq -3$
e) $x \in \mathbb{R} - \langle -3; 3\rangle$

9. Resolver:

$$(2x + 3)\,(x - 7) \leq 0$$

a) $x \in \left\langle -\frac{7}{2};\ 7\right]$ b) $x \in \left\langle -\frac{3}{2};\ 7\right]$

c) $x \in \left[-\frac{3}{2}; 7\right]$ d) $x \in \mathbb{R}$

e) $x \in \phi$

10. Resolver:

$$-x^2 - x + 56 \leq 0$$

a) $x \in [-8; 7]$
b) $x \in [7; 8]$
c) $x \in [-1; 1]$
d) $x \in \mathbb{R}$
e) $x \in \langle -\infty; -8] \cup [7; +\infty\rangle$

Nivel III

1. Resolver:

$$(x - 2)^2 > 25$$

a) $x \in \langle -\infty; -7\rangle$
b) $x \in \langle -7; +\infty\rangle$
c) $x \in \langle -\infty; -3\rangle \cup \langle 7; +\infty\rangle$
d) $x \in \mathbb{R}$
e) $x \in \langle -3; 7\rangle$

2. Resolver:

$$x^2 \leq 16$$

a) $x \leq 4$ b) $x \in [-4; 4]$
c) $x \geq 6$ d) $x \in \langle -4; 4\rangle$
e) $x \in [-16; 16]$

3. Resolver:

$$(x + 5)(2x + 1) > (x + 5)(x + 2)$$

a) $x \in \langle -5; 1\rangle$
b) $x \in \langle 1; +\infty\rangle$
c) $x \in \langle -\infty; -5\rangle \cup \langle 1; +\infty\rangle$
d) $x \in \mathbb{R} - \{1\}$
e) $x \in \langle -5; 1\rangle \cup \{5\}$

4. Al resolver: $x^2 - 5x + 2 \geq 0$ se obtiene como conjunto solución: $x \in \mathbb{R} - \langle m; n\rangle$. Indique "m + n"

a) 2   b) -1   c) -5
d) 4   e) 5

5. Si la inecuación: $x^2 - mx + n < 0$ presenta como solución $x \in \langle 3; 5\rangle$. Hallar "2m + n"

a) 15   b) 18   c) 23
d) 24   e) 31

6. Resolver:

$$25x^2 - 20x + 4 > 0$$

a) $x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{2}{5}\right\}$ b) $x \in \phi$

c) $x \in \mathbb{R}$ d) $x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{5}{2}\right\}$

e) $x \in \mathbb{R} - \left[\frac{2}{5}; \frac{5}{2}\right]$

7. Resolver: $(x - 2)(x + 1)(x - 3) > (x - 1)(x + 2)(x + 4)$
Se obtiene como conjunto solución: $x \in \langle\alpha;\beta\rangle$ Indique "$\alpha + \beta$"

a) $\frac{2}{3}$ b) $-\frac{1}{9}$ c) -9

d) $-\frac{1}{3}$ e) $\frac{1}{9}$

8. Resolver:

$$x^2 - 2x + 4 < 0$$

a) $x \in IR$
b) $x \in \phi$
c) $x \in [-2; 2]$
d) $x \in \langle -\infty; 1]$
e) $x < 2$

9. Resolver:

$$x^2 - 2x + 8 > 0$$

a) $x \in IR - [-2; 4]$
b) $x \in \phi$
c) $x \in [-1; 1]$
d) $x \in [-2; 4]$
e) $x \geq 2$

10. Resolver:

$$2 - x - x^2 < 0$$

a) $x \in \langle -\infty; -2\rangle \cup \langle 1; +\infty\rangle$
b) $x \in \langle -2; 1\rangle$
c) $x \in \langle -3; 4\rangle$
d) $x \in [-2; 8]$
e) $x \in \phi$

Autoevaluación

1. Resolver y dar su intervalo solución:

$$x^2 - 3x + 2 < 0$$

a) $x \in \langle 1;\ 2\rangle$
b) $x \in \langle -\infty;\ 1\rangle \cup \langle 2;\ +\infty\rangle$
c) $x \in \langle -\infty;\ 1\rangle$
d) $x \in \langle 1;\ +\infty\rangle$
e) $x \in \langle -1;\ 2\rangle$

2. Resolver: $2x^2 - 7x \leq -6$

a) $x \in [2;\ +\infty\rangle$
b) $x \in \left[\frac{-3}{2};\ 3\right]$
c) $x \in [3;\ +\infty\rangle$
d) $x \in [1;\ +\infty\rangle$
e) $x \in [\frac{3}{2};\ +\infty>$

3. Resolver: $2x^2 - 3x - 9 \geq 0$

a) $x \in \left\langle -\infty;\ \frac{3}{2}\right] \cup \left[3;\ +\infty\right\rangle$
b) $x \in \left[\frac{3}{2};\ 3\right]$
c) $x \in [-3;\ +\infty\rangle$
d) $x \in [1;\ +\infty\rangle$
e) $x \in \left| -\infty;\ -\frac{3}{2} \right|$

4. Resolver: $x^2 \leq 4$

a) . $\in \langle -\infty;\ -1\rangle$
b) $x \in [2;\ +\infty\rangle$
c) $x \in [-2;\ 2]$
d) $x \in \langle -\infty;\ 2]$
e) $x \in [1;\ +\infty\rangle$

5. Resolver: $x^2 - 25 > 0$

a) $x \in \langle -\infty;\ -5\rangle \cup \langle 5;\ +\infty\rangle$
b) $x \in \langle 5;\ +\infty\rangle$
c) $x \in \langle -5;\ 5\rangle$
d) $x \in \langle -\infty;\ 5]$
e) $x \in \{5\}$

Claves

1. e
2. e
3. a
4. c
5. a