RELACIONES Y FUNCIONES

RELACIONES

Introducción:

Ya Descartes nos daba, en sus trabajos, una idea de lo que era una función; pero fue Leibnitz quien introdujo este término en matemáticas, para designar cierto tipo de fórmulas; y posteriormente Euler nos brindaría la notación $y = f_{(x)}$. Actualmente existe un concepto mucho más general en el que se incluye a la función: la correspondencia

Gottfried Wilhelm Leibniz
(1646 - 1716)

Fue un filósofo, matemático, jurista. Bibliotecario y político alemán.

PAR ORDENADO

Un par ordenado está formado por dos elementos a y b y se representara así: (a ; b)
Donde a se llama primera componente y b segunda componente.
Según la definición estricta, un par ordenado se define así:

$(a ; b) = \{\{a\} ; \{a ; b\}\}$

Propiedades

1) $(a ; b) \neq (b ; a)$
2) $(a ; b) = (c ; d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$

Ejemplos:

- El par ordenado (1 ; 2) no es igual al par (2 ; 1)
- $(3 ; b) = (a ; 8) \Leftrightarrow 3 = a \wedge b = 8$

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UNA CORRESPONDENCIA

Diagrama Sagital o de Venn – Euler

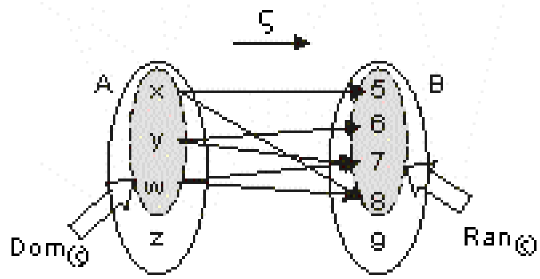
En este diagrama se utilizan flechas que salen del conjunto de partida hacia el conjunto de llegada.

Ejemplo:

Sean: $A = \{x ; y ; z ; w\}$ y $B = \{5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9\}$

Definimos: $\varsigma : A \rightarrow B$ así:
$\varsigma = \{(x ; 5) , (x ; 9) , (y ; 6) , (y ; 7) , (w ; 7) , (w ; 9)\}$

Entonces, su representación mediante el diagrama sagital será:



Donde: $Dom_{(ς)} = \{x ; y ; w\}$ y
$Ran_{(ς)} = \{5 ; 6 ; 7 ; 9\}$

RELACIONES EN R:

Relación Binaria: Dados dos conjuntos no vacíos “A” y “B”, se denomina Relación R de “A” en “B” a todo subconjunto del producto cartesiano de “A” por “B” ($R \subset A \times B$), es decir:

$R = \{(a;b)/a \in A \wedge b \in B \wedge a R b\}$

Observaciones:
- Si “R” es una relación de “A” en “B” entonces al conjunto “A” se le llama conjunto de partida, y el conjunto “B” se le llama conjunto de llegada.
- El Dom(R), está dado por el conjunto cuyos elementos son todas las primeras componentes de los pares ordenados de la relación.
- El Ran(R), está dado por las segundas componentes.

Clases de Relaciones:

1. **Relación Reflexiva:** Sea “R” una relación en “A”, diremos que “R” es una relación reflexiva, si $\forall$ a $\in$ A el par ordenado (a:a) $\in$ R.

2. **Relación Simétrica:** Sea “R” una relación en “A”, diremos que “R” es una relación simétrica, si (a;b) $\in$ R implica (b;a) $\in$ R.

3. **Relación Transitiva:** Sea “R” una relación en “A”, diremos que, “R” es una Relación Transitiva, si tenemos: (a;b) $\in$ R, (b;c) $\in$ R implica (a:c) $\in$ R.

4. **Relación de Equivalencia:** Sea “R” una relación en “A”, diremos que “R” es una relación de equivalencia, si es reflexiva, simétrica y transitiva a la vez.

PROBLEMAS PARA LA CLASE

06) Dados los conjuntos:

$A = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5\}$;
$B = \{3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8\}$ y
$R = \{(x; y) \in A \times B / y - x - 2 = 0\}$

Entonces n(R) es:

Rpta.:

07) Sean:

$M = \{2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$;
$N = \{1 ; 4 ; 6 ; 9 ; 25 ; 17\}$ y
$R = \{(x ; y) \in M \times N / y = x^2\}$

Entonces, n(R) es:

Rpta.:

08) Sean:

$A = \{2 ; 3 ; 4 ; 5\}$;
$B = \{3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7\}$
Se define la correspondencia:
$P = \{(x ; y) \in A \times B / x + y \text{ es par}\}$

Calcular n(P)

Rpta.:

09) Sean:

$A = \{16 ; 18 ; 20 ; 22\}$
$B = \{20 ; 22 ; 23 ; 26\}$

Se define la correspondencia:
$Q = \{(x ; y) \in A \times B / y = x + 4\}$

Calcular n(Q)

Rpta.:

01) Sean:

$A = \{2 ; 4 ; 6 ; 8\}$
$B = \{5 ; 7 ; 10 , 12\}$

Se define la correspondencia:

$M = \{(x ; y) \in A \times B / y - x \text{ es impar}\}$

Hallar n(M)

Rpta.:

02) Sean:

$A = \{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$;
$B = \{1 ; 3 ; 6 ; 8\}$

Y $\varsigma_{(a ; b)}$ definida por "a" es menor que "b", donde $(a ; b) \in A \times B$ ¿Cuántos pares ordenados tiene la correspondencia ς?

Rpta.:

03) En $A = \{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$ se considera la relación:

$R = \{(x ; y) \in A^2 / x = y \ \vee \ x + y = 3\}$ podemos afirmar que R es:

Rpta.:

04) ¿Se puede afirmar que:

$R = \{(x ; y) \in R^2 / x^2 - 4y^2 = 16\}$
es reflexiva?

Rpta.:

05) Dada la relación:

$R = \{(x ; y) \in N^2 / y = 6 - x\}$ ¿Se puede afirmar que $Dom_{(R)} = Ran_{(R)}$?

Rpta.:

Funciones

Las magnitudes que caracterizan un fenómeno dado pueden quedar completamente determinadas por los valores de otras. Estas interdependencias fueron las que dieron el origen al concepto de función porque gran parte de los fenómenos que se observan en la naturaleza se pueden relacionar unos con otros a través de correspondencias.

CONCEPTOS BÁSICOS DE FUNCIONES

Una función se refiere a una asignación o correspondencia de un conjunto a otro. Su definición formal es la siguiente:

Una *función* es:

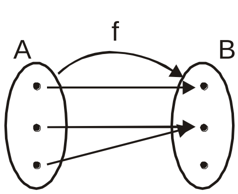
1. Un conjunto A llamado *dominio* de la función.
2. Un conjunto B llamado *rango* de la función.
3. Una *regla de correspondencia* que posee tres características

a) A todo elemento del dominio se le puede asociar un elemento del rango.
b) Ningún elemento del dominio puede quedarse sin un asociado en el rango.
c) Ningún elemento del dominio puede tener más de un asociado en el rango

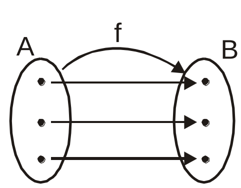
Definición: Dados los conjuntos no vacíos “A” y “B” y una relación $F \subset A \times B$ se define: F es una función de “A” en “B” si y sólo si para cada $X \in A$, existe a lo más un elemento $y \in B$ tal que el par $(x ; y) \in F$, es decir que dos pares ordenados distintos no pueden tener la misma primera componente.

$$\boxed{\text{Si: F es una función tal que } (x;y) \in F \wedge (x;z) \in F \Rightarrow y = z}$$

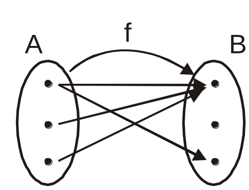
Ejemplo:



Sí es función



Sí es función



No es función

<u>Dominio y Rango</u>:

Abreviado por Dom(f) y Ran(f) respectivamente se define así:

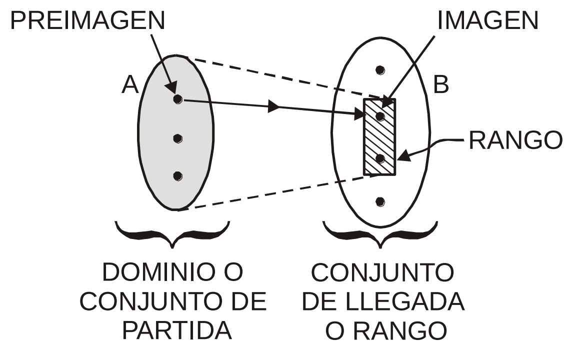
Dominio: Denominado PRE-IMAGEN, conjuntos de los primeros elementos de un par ordenado.

Rango: Llamado también IMAGEN, es el conjunto de los segundos elementos de la correspondencia que pertenecen al conjunto de llegada B.

En conclusión: $\boxed{\text{Dom}(f) \subset A \wedge \text{Ran}(f) \subset B}$

NOTACIÓN:

$$f : \underbrace{A}_{\text{DOIMINIO}} \to B$$



Ejemplos:

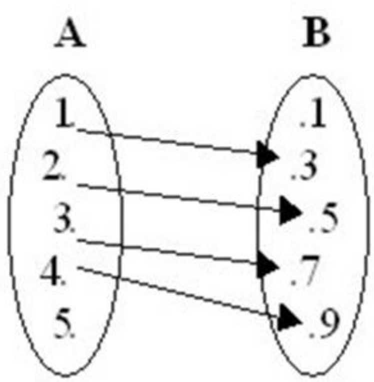
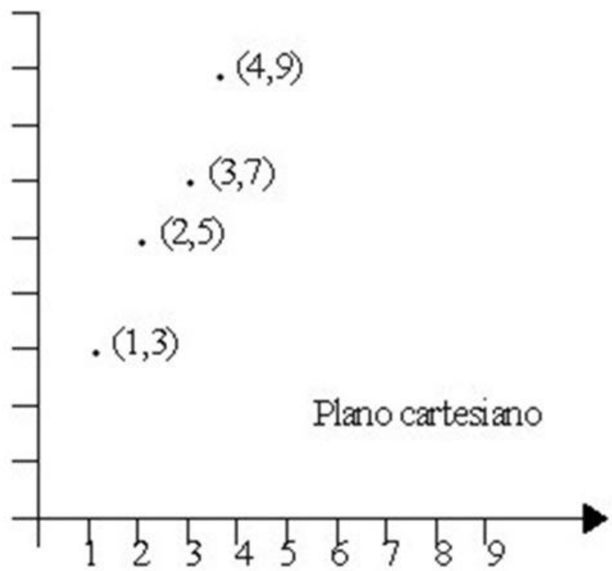
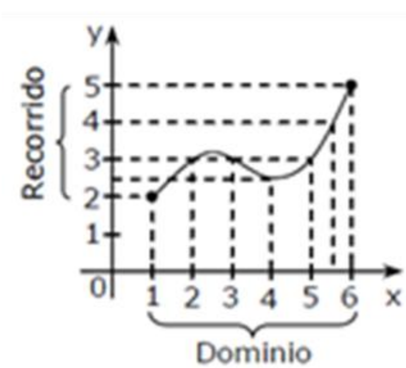
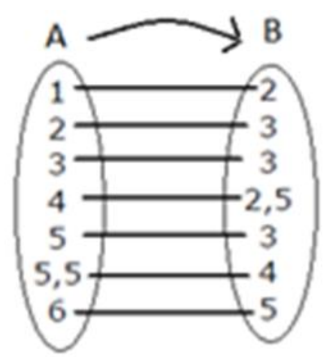


Diagrama sagital



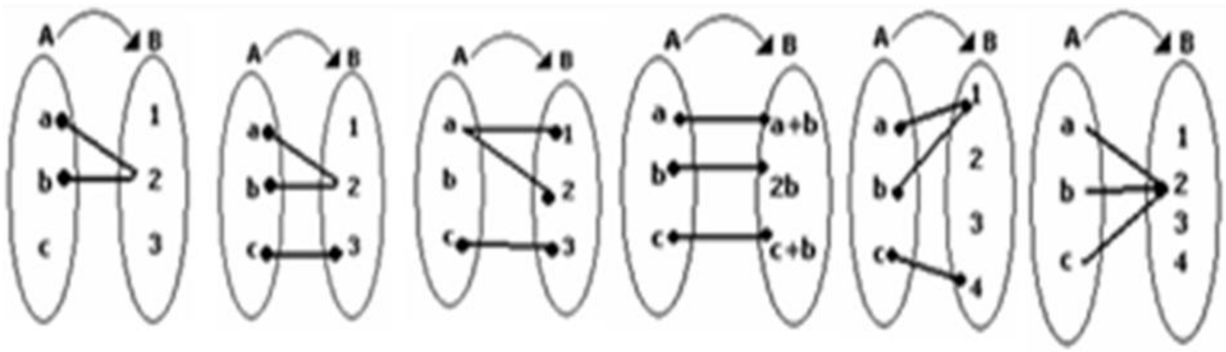


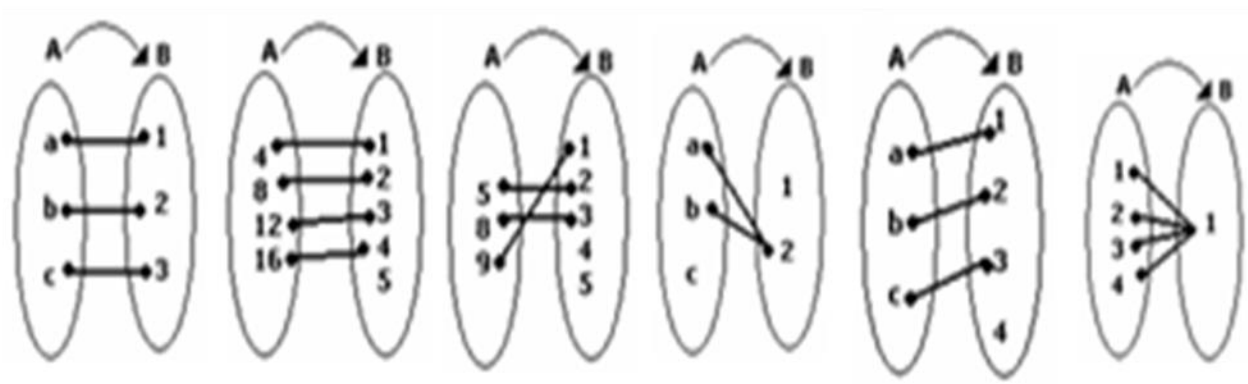
x	y
1	2
2	3
3	3
4	2,5
5	3
5,5	4
6	5



Ejemplos:

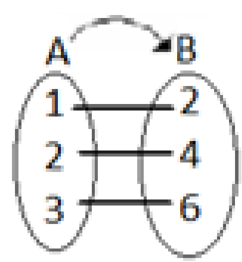
De los diagramas que se presentan a continuación, diga cuales representan una función:



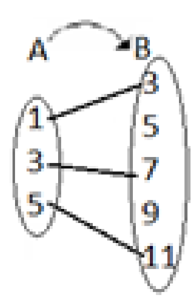


Regla de correspondencia:

Ejemplo:



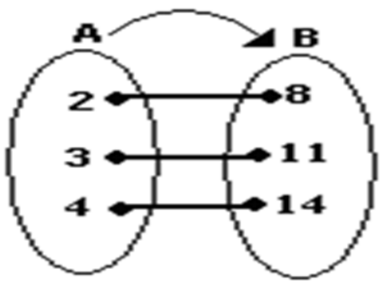
Si:
A={1,3,5} y B={2,4,6} y su correspondencia es el doble
Entonces el criterio de la función es: f(x)=2x

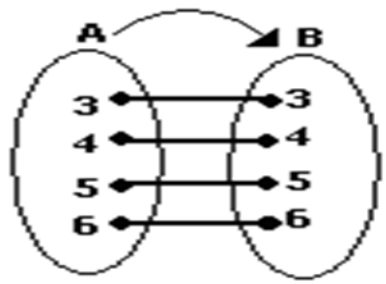


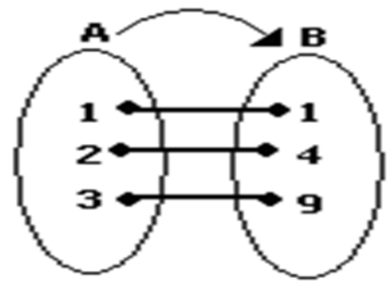
Si:
A={1,2,3} y B={3,5,7,9,11} y su correspondencia es el doble más uno.
Entonces el criterio de la función es: f(x)=2x + 1

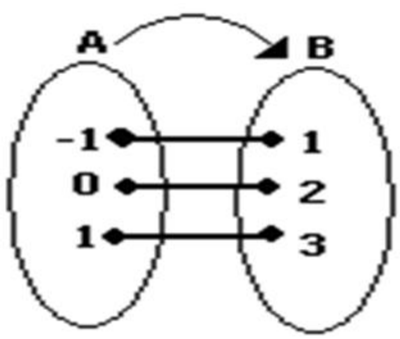
ACTIVIDADES PARA LA CLASE

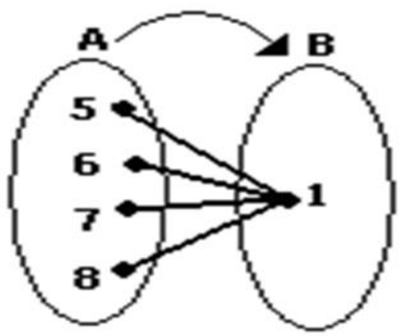
Determine el criterio de la función para cada correspondencia:

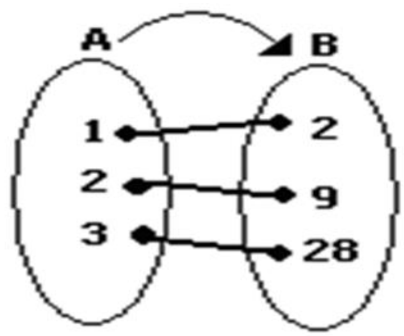












CLASES DE FUNCIONES:

F. Inyectiva o Univalente: Cuando cada elemento del Rango le corresponde un único elemento del dominio.

F. Sobreyectiva: Cuando el rango o imagen de F coincide con el conjunto de llegada B, es decir:

$$\boxed{Ran(f) = f(A) = B}$$

Función Biyectiva: Cuando es a la vez inyectiva y sobreyectiva.

FUNCIONES ESPECIALES:

F. Identidad : F(x) = x

F. Constante : F(x) = K; K $\in$ R

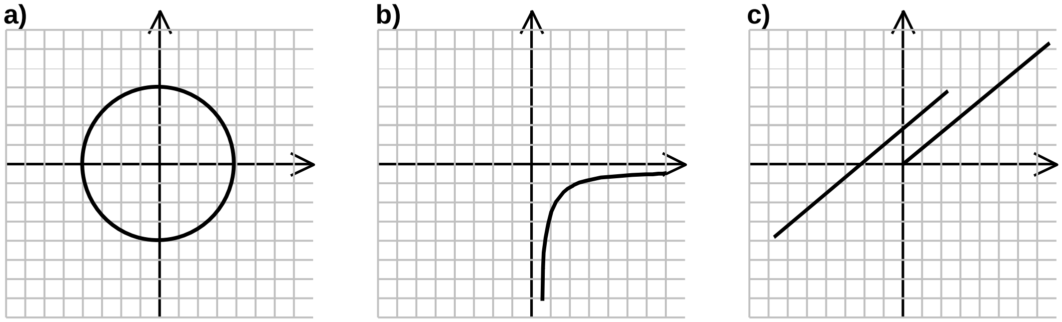
F. Lineal : F(x) = y = mx + b

F. Valor Absoluto: F(x) = y = **|** x **|** $\begin{cases} \bullet\ x & : x > 0 \\ \bullet\ 0 & : x = 0 \\ \bullet\ -x & : x < 0 \end{cases}$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. De las siguientes funciones decir cuál de ellas son funciones, y en ese caso indica el dominio y el recorrido.

a) **b)** **c)**



Solución:
Aplicando el test de la línea vertical se observa que en (a) y en (c) se puede cortar la gráfica en dos puntos. Sólo es una función el que correspondiente a (b).
Dominio (0, ∞).
Recorrido (-∞,0).

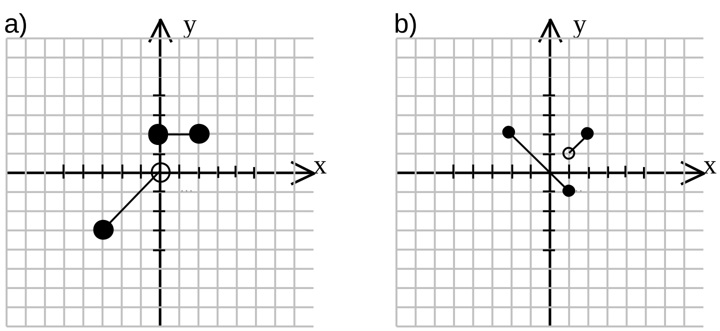
2. Representa las siguientes funciones e indica su dominio y recorrido:

$\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \mathbf{x,\ si\ \ x} \in [\mathbf{-\ 3,0}) \\ \mathbf{2,\ si\ x} \in [\mathbf{0,2}] \end{cases}$ $\mathbf{g(x)} = \begin{cases} \mathbf{-\ x,\ \ si\ x} \in [\mathbf{-\ 2,1}] \\ \mathbf{x,\ \ si\ x} \in (\mathbf{1,2}] \end{cases}$

a) **b)**

Solución:

a) b)



a) Dom(f) = $[-3,2]$, Rec(f) = $[-3,0) \cup \{2\}$

b) Dom(g) = $[-2,2]$, Rec(g) = $[-1,2]$

PROBLEMAS PARA LA CLASE

01. Hallar verdadero (V) o falso (F) según convenga:
    - Toda función es una relación.
    - Toda relación es una función.
    - Toda recta es una función.
    - Toda parábola es una función.

02. Halla el dominio de la función:

$$f_{(x)} = \frac{5x-3}{\sqrt{2-x}}$$

Respuesta:

03. Dada la función:

$$f_{(x)} = -\frac{3}{8} + x$$

Determina el dominio y el rango.

04. Calcular "P" si:

P = F(2) + F(4) . F(-3) +(F-1).

Si:

$$F(x) = \begin{cases} 3x-1\,;\, x > 3 \\ x^2-1;-2 \le x \le 3 \\ 2x+3\,;\, x < -2 \end{cases}$$

Respuesta:

05. Halla el rango de la función.
$f(x) = 4x - 3$, $x \in [-2; 7>$

06. Halla el rango función.
$f(x) = \sqrt{x+5} + 1$, $x \in <1; 4]$

07. Hallar el valor mínimo:

$F(x) = \sqrt{x^2+x+1}$

Respuesta:

08. Es función:

F = [(8;2),(2;a),(a^2-1;b)(2;2a-3), (3:5)]

Hallar; "a + b"

09. Si: F(x+1) = F(x) + x; y F(2) = 5.

Calcular: $\frac{F(4)}{F(0)}$

Respuesta:

10. Hallar el rango de:
$F(x) = 2+(-1)^{[x]}$

Respuesta:

11. Dada la función:
$F(x) = \frac{1}{x^2-1}$

Entonces ¿se puede afirmar que es creciente en $\langle -\infty,-1\rangle$?.

Respuesta:

12. Si: $F(x) = \frac{x^2-4}{x^2+5x+6}$

A = Dominio de F(x)
B = Rango de F(x).

Hallar "A - B"

Respuesta:

13. Encontrar el valor mínimo de la función:

$F(x) = \frac{1+x^2}{1+x}; x \in [0;\infty\rangle$

Respuesta:

14. Si f es una función lineal, se cumple que:
f(4) = 16; f(– 4) = – 8

Calcula f(2)

Respuesta:

FUNCIÓN CUADRÁTICA

La forma general de una función cuadrática es la siguiente:

$$\boxed{f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ con } a \neq 0;\ a, b, c \in \mathbb{R}}$$

Las letras a, b y c se llaman coeficientes de la función; la letra x representa la variable independiente y la expresión f(x) representa el valor obtenido al reemplazar x por algún valor en el lado derecho de la igualdad, es decir, f(x) es la imagen de ***x***. La expresión f(x) puede reemplazarse por la letra y que representa a la variable dependiente de la función. Así la expresión del recuadro anterior, también se puede escribir: ***y = ax² + bx + c.***

Ejemplo:
1. Evalúa cada función cuadrática para el valor de x que se indica

a) $y = 4x^2 - 5x + 1$; x = 3 R: y = 22

b) $f(x) = 5 - 7x - x^2$; x = $-\frac{4}{7}$ R: y= $\frac{425}{49}$

c) $f(x) = 8x + 3x^2$; x = -5 R: f(-5)=35

La gráfica de la función cuadrática es una Parábola.
La concavidad de una Parábola o la posición en que se abre, (hacia arriba o hacia abajo) está determinada por el signo del coeficiente x^2, en la función $y = ax^2 + bx + c$, es decir, está determinada por el signo "a". Así:

a) Sí a > 0, entonces la concavidad es positiva y la Parábola se abre hacia arriba.
b) Sí a < 0, entonces la concavidad es negativa y la Parábola se abre hacia abajo.

Las intersecciones de la gráfica con el eje X corresponden a las soluciones de la ecuación cuadrática asociada; es decir a; $ax^2 + bx + c = 0$ (cuando Y toma el valor cero la gráfica está sobre el eje X).

La intersección de la Parábola con el eje Y se obtiene haciendo x = 0 y corresponde por supuesto a y = c

Los ceros de la función cuadrática se determinan haciendo Y = 0, por lo tanto, se debe resolver la ecuación de 2º grado y determinar las soluciones.

Todas las Parábolas tienen un vértice que corresponde al valor mínimo (sí la parábola se abre hacia arriba) o el valor máximo si la parábola se abre hacia abajo.

Las coordenadas del vértice son V = $\left(-\frac{b}{2a}, -\left(\frac{b^2-4ac}{4a}\right)\right)$

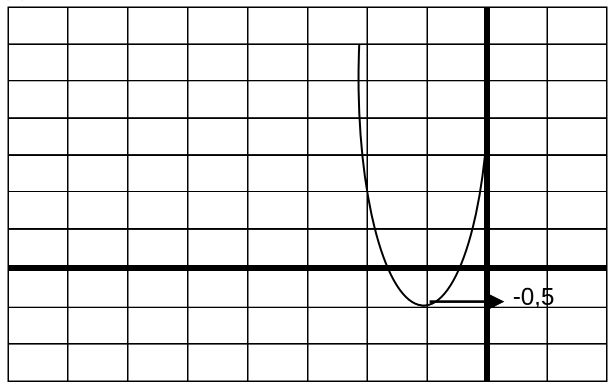
La recta x = $-\frac{b}{2a}$ es el eje de simetría de la parábola. Con el valor del eje de simetría se puede determinar los intervalos reales en los cuales son crecientes o decrecientes.

Ejemplo:

2. Dada la siguiente función: $f(x) = x^2 + 3x + 2$

Debes encontrar el conjunto de la pre-imágenes y de las imágenes. Esto se logra (en un principio) a través de la gráfica:

x	**f(x)**
-4	6
-3	2
-2	0
-1	0
0	2
1	6
2	12
3	20



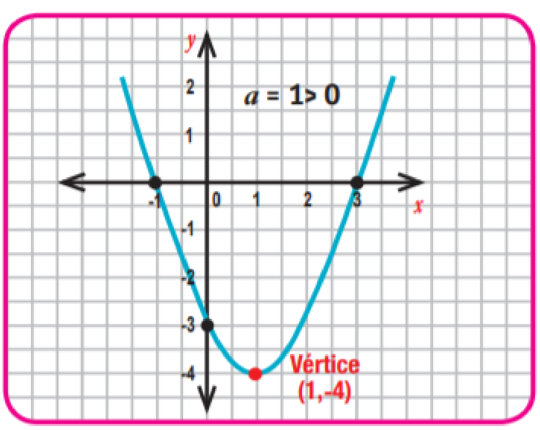
Ahora pregúntate ¿Qué valores pueden darle a **x**? Y ¿Qué valores vas a obtener de **y**?

Si te das cuenta puedes darle cualquier valor a x, por lo tanto, **Dom f = IR**.

Pero que valores vas a obtener de y, si te fijas en la flecha sólo toman valores de $-0{,}5$ a $+\infty$, por lo tanto, el **Rec f = [-0,5; +∞].**

3. Observe detenidamente el cálculo del vértice de la parábola.

$f(x) = x^2 - 2x - 3$



Los coeficientes son: $\boldsymbol{a = 1, b = -2, c = -3}$ determinamos las coordenadas del punto de vértice, haciendo uso de la expresión:

$V\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$ y de la evaluación algebraica:

$\frac{-b}{2a} \rightarrow -\frac{(-2)}{2 \cdot 1} = \frac{2}{2} = \mathbf{1}$, por lo tanto $\boldsymbol{x = 1}$

$f\left(\frac{-b}{2a}\right) \rightarrow f(\mathbf{1}) = \mathbf{1}^2 - 2 \cdot \mathbf{1} - 3 = -4$

por lo tanto $\boldsymbol{y = -4}$

Vértice $\boxed{V(1, -4)}$

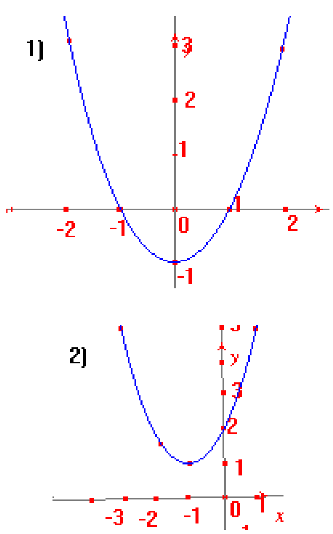
PROBLEMAS PARA LA CLASE

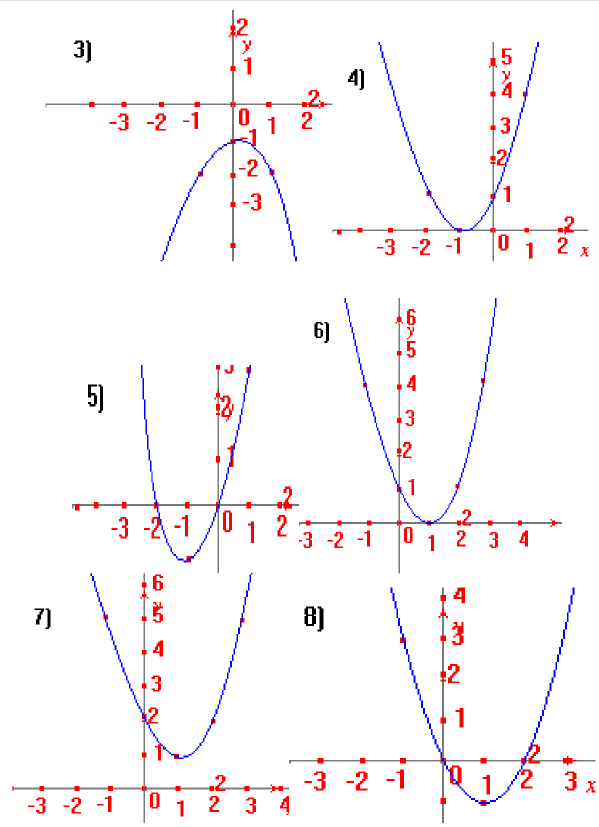
1. Calcula las coordenadas del vértice, valor máximo o mínimo de cada una de las siguientes funciones cuadráticas:
   a) $y = x^2 - 8x - 9$
   b) $y = x^2 - 6x$
   c) $y = -3x^2 + 6x + 2$
   d) $y = 2x^2 - 18$
   e) $y = -\dfrac{x^2}{2} + 3x$

2. Determina para cada una de las siguientes funciones cuadráticas los intervalos reales en los cuales son crecientes o decrecientes:
   a) $y = -3(x+2)^2 - 4$
   b) $y = 2x^2 + 5x - 6$
   c) $y = -x^2 + 5x - 6$
   d) $y = x^2 + 7x$
   e) $y = 4x^2 - 8x + 3$
   f) $y = 1 - x^2$

3. En los gráficos del 1 al 8 asocie cada uno de ellos con una de las siguientes funciones:

   a) $y = x^2 - 1$ b) $y = -x^2 - 1$
   c) $y = x^2 - 2x + 1$ d) $y = x^2 + 2x + 1$
   e) $y = x^2 - 2x + 2$ f) $y = x^2 + 2x$
   g) $y = x^2 - 2x$ h) $y = x^2 + 2x + 2$





4. La función $y = 4x^2 - 1$ es creciente en el intervalo:

   a) $\left]\dfrac{-1}{2}, \dfrac{1}{2}\right[$
   b) $\left]\dfrac{-1}{2}, -1\right[$
   c) $]-\infty, -1]$
   d) $[0, +\infty]$
   e) $\left[-1, \dfrac{1}{2}\right[$

5. El vértice de la parábola representado por la función $y = 2x^2 - 1$, es:
   a) (0 , 0)
   b) (0 , -1)
   c) (0 , 1)
   d) (0 , 2)
   e) (0 , -2)