LÓGICA PROPOSICIONAL

En el pasado las matemáticas eran consideradas como la ciencia de la cantidad, referida a las magnitudes (como en la geometría), a los números (como la aritmética), o a la generalización de ambos (como en álgebra). Hacia mediados del siglo XIX, las matemáticas se empezaron a considerar como la ciencia de las relaciones, o como la ciencia que produce condiciones necesarias. Esta última noción abarca la lógica matemática o simbólica, ciencia que consiste en utilizar símbolos para generar una teoría exacta de deducción e inferencia lógica basada en definiciones, axiomas, postulados y reglas que transforman elementos primitivos en relaciones y teoremas más complejos.

Trataremos la evolución de los conceptos e ideas matemáticas siguiendo su desarrollo histórico. En realidad, las matemáticas son tan antiguas como la propia humanidad: En los diseños prehistóricos de cerámica, tejidos, y en las pinturas rupestres se pueden encontrar evidencias del sentido geométrico y del interés en figuras geométricas. Los sistemas de cálculo primitivo estaban basados, seguramente, en el uso de los dedos de una o dos manos, lo que resulta evidente por la gran abundancia de sistemas numéricos en los que las bases son los números 5 y 10.

DEFINICIÓN Y OBJETO DE LA LÓGICA

La palabra lógica se deriva de la palabra griega logos que significa razonamiento o discurso.

La lógica matemática es la disciplina que trata de métodos de razonamiento. En un nivel elemental, la lógica proporciona reglas y técnicas para determinar si es o no válido un argumento dado. El razonamiento lógico se emplea en matemáticas para demostrar teoremas; en ciencias de la computación para verificar si son o no correctos los programas; en las ciencias física y naturales, para sacar conclusiones de experimentos; en las ciencias sociales y en la vida cotidiana, para resolver una multitud de problemas. Ciertamente se usa en forma constante el razonamiento lógico para realizar cualquier actividad.

CONCEPTO DE PROPOSICIÓN

Se llama proposición a todo enunciado respecto del cual se disponga de un criterio que nos permita afirmar que su contenido es verdadero (V) o falso (F).

A toda proposición se le puede asignar uno de los dos valores: verdadero (V) o falso (F), pero nunca ambos a la vez.

En matemáticas, algunas proposiciones reciben nombres especiales.

Destacaremos, como más importantes, los llamados postulados o axiomas (palabras en la actualidad sinónimas en algunos casos) y los teoremas.

Postulados o Axiomas: Son aquellas proposiciones que se dan como ciertas desde un principio:

Ejemplo: "Por dos puntos distintos pasa siempre una recta y sólo una".

Teoremas: Son aquellas proposiciones cuya certeza es demostrada por un razonamiento, conforme a las leyes de la lógica.

Ejemplos de proposiciones:

a. Carmen es prima de José. (Este enunciado puede ser, en efecto, verdadero o falso.)
b. Sofía está cansada. (Como en el ejemplo anterior, este enunciado puede ser verdadero o falso.)
c. Los niños necesitan jugar.
d. Sócrates es un hombre.
e. La cultura es fundamental para la humanidad.
f. $x + 4 = 26$ (Nótese que según el valor que adopte la variable x, este enunciado puede ser verdadero o falso).

Por el contrario, no serían proposiciones los siguientes enunciados:

g. ¡Dile que pase!
h. ¡Pon el libro en la estantería!
i. Todas las personas tienen que cuidarse.
j. ¿Será eso cierto?

En efecto, los ejemplos g) y h) no constituyen proposiciones, puesto que los enunciados que en ellos figuran no son susceptibles de adaptar uno de los valores: verdadero o falso, y puede afirmarse, en general, que ni las frases imperativas, como g) y h), ni las frases interrogativas, del tipo j), constituyen proposiciones.

Tarea:

Escribir 10 proposiciones válidas y 10 enunciados.

VALOR DE VERDAD. Una proposición es verdadera o es falsa; si es verdadera se denotará por la letra “V” o el “1” y si es falsa se denotará por “F” o por el “0”. Si no se puede determinar su valor de verdad, se podrá analizar los posibles valores de verdad (tablas de certeza).

CLASES DE PROPOSICIONES:

Las proposiciones se clasifican en proposiciones simples o atómicas y proposiciones compuestas o moleculares:

Proposiciones simples.- Son aquellas proposiciones que no se pueden descomponer.

Ejemplo:

p: Todo organismo viviente se adapta a su medio físico.

q: Si un número es divisible por 4 también lo es por 2.

r: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Proposiciones compuestas o moleculares.- Son aquellos enunciados que están formados por dos o más proposiciones simples y unidos por término lógico.

Ejemplos:

p: La niña María canta y su hermano Luis toca el piano.

q: Ecuador es un país Amazónico y latinoamericano.

Podemos observar en los ejemplos anteriores que tanto p como q están compuestas de dos proposiciones simples.

Los conectivos lógicos son elementos gramaticales que unen dos o más proposiciones simples; estos son:

CONECTIVOS LÓGICOS

OPERADOR LÓGICO	LÓGICA SIMBÓLICA	TERMINOLOGÍA LÓGICA
Negación	$\neg$ ~	no
Conjunción	$\wedge$	y
Disyunción	$\vee$	o
Disyunción exclusiva	$\underline{\vee}$	o en sentido excluyente
Conjunción negativa	$\downarrow$	ni….ni
Disyunción negativa	/	no…no
Condicional	$\rightarrow$	Si…., entonces
Bicondicional	$\Leftrightarrow$	Si y sólo si

PROPOSICIONES COMPUESTAS Y CONECTIVOS LÓGICOS

Los operadores lógicos también permiten formar proposiciones compuestas (formadas por varias proposiciones). Los operadores o conectores básicos son:

CONJUNCIÓN ($\wedge$) QUE SE LEE “Y”

Se utiliza para conectar dos proposiciones que se deben cumplir para que se pueda obtener un resultado verdadero. Su símbolo $\wedge$ que se lee “y”. Se lo conoce como la multiplicación lógica y tiene estrecha relación con la intersección de conjuntos.

Ejemplo.

Sea el siguiente enunciado "El coche enciende cuando tiene gasolina en el tanque y tiene corriente la batería". Simbolizando tenemos:

p: el coche enciende cuando tiene gasolina en el tanque

q: tiene corriente la batería.

V(p) = V

V(q) = V

En consecuencia:

$V(p \wedge q) = V$

Otro ejemplo:

3 + 4 = 6 y 3 + 7 = 10

p: 3 + 4 = 6 V(p) = F

q: 3 + 7 = 10 V(q) = V

Por consiguiente:

$V\ (p \wedge q) = F$

De tal manera que la representación del enunciado anterior usando simbología lógica es como sigue:

$p \wedge q$; que se lee:
- p y q
- p pero q
- p aunque q
- p incluso q, p también q; etc.

Su tabla de verdad es:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

LA DISYUNCION:

LA DISYUNCIÓN INCLUSIVA: ($\vee$) QUE SE LEE: "O".

Es la unión de dos proposiciones simples con el conectivo lógico "o". Simbólicamente se lo representa así: $p \vee q$ que se lee p ó q o ambas. El enunciado es verdadero cuando alguna de las proposiciones es verdadera o ambas son verdaderas; Se conoce también como la suma lógica y se relaciona estrechamente con la unión de conjuntos.

Ejemplos:

Sea el siguiente enunciado “Una persona puede entrar al cine si compra su boleto u obtiene un pase”. Donde.

p: Una persona puede entrar al cine si se compra su boleto.

q: Obtiene su pase.

Simbólicamente tenemos:

$p \vee q$

V(p) = V

V(q) = V

En consecuencia: V ($p \vee q$) = V

4 + 3 = 9 o 3 + 5 = 8

p: 4 + 3 = 9 V (p) = F

q: 3 + 5 = 8 V (q) = V

En consecuencia: V ($p \vee q$) = V

Su tabla de verdad es:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

DISYUNCIÓN EXCLUSIVA.- ($\underline{\vee}$) QUE SE LEE O EN SENTIDO EXCLUYENTE

El enunciado es verdadera cuando p es verdadero y q es falso o viceversa. Simbólicamente se lo representa por $p \underline{\vee} q$ que se lee p <u>o</u> q pero no ambas.

Ejemplos:

Carmen es hija de José ó de Vicente

Simbólicamente tenemos:

p: Carmen es hija de José V(p) = V

q: Carmen es hija de VicenteV (q) = V

En consecuencia: V (p $\underline{\vee}$ q) = F
(p $\underline{\vee}$ q) que se lee: p ó q, pero no ambas.
Su tabla de verdad es:

p	q	(p $\underline{\vee}$ q)
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

PROPOSICIONES CONDICIONALES ($\Rightarrow$) que se lee "entonces"

Una proposición condicional, es aquella que está formada por dos proposiciones simples (o compuesta) p y q. La cual se indica de la siguiente manera: $\Rightarrow$ que se lee "si p, entonces q; simbólicamente se la representa por:

p $\Rightarrow$ q
- Se lee "Si p, entonces q"
- Si p, q
- p, sólo si q
- p es necesario para q; etc. En este caso p: es el antecedente y q: es el consecuente.

Se lee:

q $\Rightarrow$ p
- q puesto que p
- q, si p
- q cuando p
- q cada vez que p
- q dado que p
- q porque p

q ya que p; etc. Se caracterizan porque después de cada uno de estos conectivos está el antecedente o condición.
Su tabla de verdad es:

p	q	p $\Rightarrow$ q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

PROPOSICIÓN BICONDICIONAL: ($\Leftrightarrow$), QUE SE LEE "SI Y SÓLO SI"

Sean p y q dos proposiciones simples entonces se puede indicar la proposición bicondicional de la siguiente manera: p $\Leftrightarrow$ q; que se lee "p si y solo si q".
Esto significa que p es verdadera si y solo si q es también verdadera. O bien p es falsa si y solo si q también es falsa. Ejemplo; el enunciado siguiente es una proposición bicondicional.
"Luis es buen estudiante, si y solo si; tiene promedio de diez"

Simbólicamente tenemos:

p: Luís es buen estudiante V (p) = V

q: Tiene promedio de diez. V (q) = V

Por consiguiente: V (p $\Leftrightarrow$ q) = V

Su tabla de verdad es:

p	q	p $\Leftrightarrow$ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

La proposición bicondicional solamente es verdadera si tanto p como q son falsas o bien ambas verdaderas.

La proposición bicondicional, también se forma por la conjunción de una proposición condicional y su recíproca, simbólicamente tememos:

$$p \Leftrightarrow q \ = \quad p \Rightarrow q \ \wedge q \Rightarrow p$$

Ejemplo: Juan viajará a la ciudad de Cuenca si y sólo si obtiene un préstamo en el Banco de crédito; Simbólicamente tenemos: q $\Rightarrow$ p

Equivale a decir: Si Juan viaja a la ciudad de Cuenca, entonces obtiene un préstamo en el Banco de crédito, y si obtiene un préstamo en el Banco de Loja viajará a la ciudad de Cuenca. Simbólicamente tenemos: = $p \Rightarrow q \ \wedge q \Rightarrow p$

SIGNOS DE PUNTUACIÓN, AGRUPACIÓN Y ORDEN DE LOS OPERADORES O CONECTIVOS LÓGICOS

Los signos de agrupación más conocidos tenemos: el paréntesis, corchete y llaves

( ); [ ] ; { }

Estos signos reemplazan a los signos gramaticales: punto (.), la coma (,), el punto y como (;), y los dos puntos (:).

ACTIVIDADES PARA LA CLASE

1. Sean *p, q* y *r* las proposiciones siguientes:

   p: "está lloviendo"

   q: "el sol esta brillando"

   r: "hay nubes en el cielo"

Traduciremos las siguientes oraciones a notación simbólica utilizando las letras asignadas y los conectivos lógicos:

1	Está lloviendo y el Sol brillando	
2	Si está lloviendo, entonces hay nubes en el cielo	
3	Si no está lloviendo, entonces el Sol no está brillando y hay nubes en el cielo	
4	El Sol está brillando si, y sólo si, no está lloviendo	
5	Si no hay nubes en el cielo, entonces el Sol está brillando	
5	O esta lloviendo o el sol está brillando	

2. Sean p, q y r del ejercicio 1. Traducir las siguientes proposiciones simbólicas a oraciones en español:

1	$(p\wedge q)\rightarrow r$	
2	$\sim p\leftrightarrow(q\vee r)$	
3	$\sim(p\vee q)\wedge r$	
4	$(p\rightarrow r)\rightarrow q$	
5	$\sim(p\leftrightarrow(q\vee r))$	

3. Sean las proposiciones p : Yo estudio
   q : Voy al cine

   Traduzca al lenguaje ordinario las fórmulas lógicas :

   a) $(p \wedge \sim q) \rightarrow p$
   b) $\sim (p \vee \sim q)$
   c) $q \,\Delta\, \sim p$
   d) $\sim p \wedge \sim q$

4. Dadas las proposiciones : q : "2 es número par"
   P y r son dos proposiciones cualesquiera tal que:

   $\sim [(r \vee q) \rightarrow (r \rightarrow p)]$ es verdadera;

   entonces el valor de verdad de los siguientes esquemas moleculares :

   a) $r \rightarrow (\sim p \vee \sim q)$ b) $[r \rightarrow (p \wedge q)] \leftrightarrow (q \wedge \sim p)$ c) $(r \vee \sim p) \wedge (q \vee p)$; es :

VALORES DE VERDAD DE PROPOSICIONES COMPUESTAS

Hay dos formas de establecer los valores de verdad:

1. Por medio de las tablas de verdad

Las tablas de verdad permiten determinar el valor de verdad de una proposición compuesta y depende de las proposiciones simples y de los operadores que contengan.

Es posible que no se conozca un valor de verdad específico para cada proposición; es este caso es necesario elaborar una tabla de verdad que nos indique todas las diferentes combinaciones de valores de verdad que pueden presentarse. Las posibilidades de combinar valores de verdad dependen del número de proposiciones dadas.

Para una proposición (n = 1), tenemos $2^1 = 2$ combinaciones

Para dos proposiciones (n = 2), tenemos $2^2 = 4$ combinaciones

Para tres proposiciones (n = 3), tenemos $2^3 = 8$ combinaciones

Para n proposiciones tenemos 2^n combinaciones

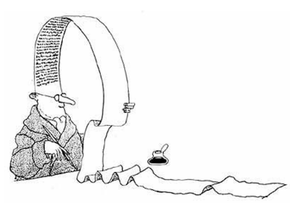
Ejemplo: dado el siguiente esquema molecular, construir su tabla de valores de verdad:

Pasos para construir la tabla:

$$(\neg p \wedge q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow \neg r)$$

1. Determinamos sus valores de verdad $2^3 = 8$ combinaciones
2. Determinamos las combinaciones:

p	q	r
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F
F	F	V
F	F	F



Ejemplo. Construir la tabla de verdad de la proposición:

$[\sim p \rightarrow (q \wedge p)] \rightarrow \sim q$

Solución: $2^n = 2^2 = 4$ combinaciones posibles

p	q	[~ p	→	(q ∧ p)]	→	~q
V	V	F	V	V	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	F	V	F
F	F	V	F	F	V	V

Ejemplo. Construir la tabla de verdad de la proposición:
$[\sim p \wedge (q \vee r)] \leftrightarrow [(p \vee r) \wedge q]$

Solución: $2^n = 2^3 = 8$ combinaciones posibles

p	q	r	[~p	∧	(q ∨ r)]	↔	[(p ∨ r)	∧	q]
V	V	V	F	F	V	F	V	V	V
V	V	F	F	F	V	F	V	V	V
V	F	V	F	F	V	V	V	F	F
V	F	F	F	F	F	V	V	F	F
F	V	V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V	F	F	F	V
F	F	V	V	V	V	F	V	F	F
F	F	F	V	F	F	V	F	F	F

3. Evaluar el siguiente esquema:

   $\sim (p \vee q) \rightarrow \sim p \wedge \sim q$

ACTIVIDADES PARA LA CLASE

1. Determina cuales de las siguientes expresiones son proposiciones y halla su valor de verdad.
   p. ¿Será eso cierto?

   q. La cultura es fundamental para la humanidad.

   m. La tierra es plana.

n: $-17 + 38 = 21$

r: $x > y-9$

s: El Cienciano será campeón en la presente temporada de Fútbol.

t: Hola ¿como estas?

w: Lava el coche por favor.

2. Simboliza cada una de las proposiciones
   A: El coche enciende cuando tiene gasolina en el tanque y tiene corriente la batería.

   B. Una persona puede entrar al cine si compra su boleto u obtiene un pase.

   C: Si salgo electo presidente de la República del Perú, entonces recibirán un 50% de aumento en su sueldo el próximo año.

3. Sean las proposiciones:
   p: $3^2 + 2^3 = 17$

   q: $6^2 = 36$

   r: $3^2 + 4^3 > 5^4$

   los valores de verdad de los siguientes esquemas moleculares:

   I. $p \wedge q \rightarrow r$ II. $(p \rightarrow r) \wedge q$ III. $p \wedge (q \rightarrow r)$ son respectivamente:
   a) FFV b) FVF c) FVV d) VVV e) FFF

4. Evaluar los siguientes esquemas moleculares:
   I. $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$
   II. $(p \rightarrow q) \vee q$
   III. $(\sim p \wedge \sim q) \Leftrightarrow \sim(p \vee q)$
   IV. $(p \wedge q) \Rightarrow (p \Leftrightarrow q)$
   V. $(\sim p \wedge q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow \sim r)$

5. Si la proposición:
   $(p \wedge \sim q) \rightarrow (r \rightarrow \sim s)$ es falsa, el valor de verdad de p, q, r y s es:

6. De la falsedad de la proposición: $(p \rightarrow \sim q) \vee (\sim r \rightarrow s)$ se deduce que el valor de verdad de los esquemas moleculares:
   I. $(\sim p \wedge -q) \vee \sim q$
   II. $(\sim r \vee q) \Leftrightarrow [(\sim q \vee r) \wedge s]$
   III. $(p \rightarrow q) \rightarrow [(p \vee q) \wedge \sim q]$; son respectivamente

MATEGRAMA DE LÓGICA

C	R	C	E	Q	U	I	V	A	L	E	N	T	E	S	P	R	M
N	O	O	T	R	S	M	B	C	L	P	R	O	S	L	A	F	O
T	P	N	V	O	A	I	G	O	L	O	T	U	A	T	R	S	L
A	R	T	E	G	H	J	K	L	Z	S	E	T	S	P	S	A	E
O	P	R	R	C	Q	N	O	I	C	A	G	E	N	E	P	I	C
R	R	A	D	V	T	P	G	H	J	K	U	L	L	O	P	C	U
A	S	D	A	D	F	I	G	H	J	P	J	P	K	L	Ñ	N	L
C	A	I	D	R	T	N	V	T	M	T	M	G	H	J	K	E	A
O	A	C	E	A	S	O	D	O	F	I	G	H	J	K	L	G	R
N	C	C	R	P	R	O	P	O	S	I	C	I	O	N	A	N	S
J	I	I	O	A	S	C	D	D	D	L	F	G	H	J	K	I	L
U	M	O	A	S	D	N	F	G	H	J	O	A	L	B	A	T	D
N	O	N	A	S	D	N	F	G	H	J	O	G	L	B	A	N	D
C	T	A	S	D	D	Y	F	G	H	Y	K	K	I	L	Ñ	O	L
I	A	C	V	B	S	I	M	P	L	E	R	F	Q	C	H	C	J
O	U	J	L	F	E	I	M	P	L	I	C	A	N	C	O	A	U
N	A	S	D	F	G	H	R	T	Y	O	A	S	D	F	G	S	R
C	O	N	D	I	C	I	O	N	A	L	A	S	D	F	G	H	S

Completa las siguientes proposiciones.

1) Se representan p, q, r, s, t a una: ________________________
2) “y”, “o”, “no”, “Si.....entonces....” son : ___________________
3) “8 + 7 = 15” proposición: ____________________________
4) “18 y 24” son múltiplos de 6» proposición: _____________
5) El valor de verdad de 4 +12 > 15 es_____________________
6) El valor de verdad de 8 – 3 = 5: ___________
7) El conectivo «v» representa a:______________
8) El conectivo «^» representa a:________________
9) El conectivo “=>” representa a:_____________
10) El conectivo «<=>» representa a:_________________
11)Si la proposición es verdadera se llama:______________
12) Si la proposición es falsa se llama:__________________
13) En la solución unos V y otros F la proposición se llama:_______________
14) « ~» representa a:______________________
15) es una _____________ de verdad

p	
v	
f	

16) La implicación o:_____________________
17) Proposición Compuesta o ____________________________
18) Proposición simple o _________________________

“Sin la matemática, no nos sería posible comprender muchos pasajes de las sagradas escrituras”.
San Agustín.