MEDIDAS DE DISPERSIÓN

Ya hemos estudiado las medidas de tendencia central o de centralización: media aritmética, mediana y moda ($\bar{x}$, Me, Mo).

Estudiaremos ahora algunas de las llamadas medidas de dispersión: rango, desviación media y desviación típica o estándar
Medidas de dispersión son valores típicos de cada conjunto de datos, que expresan la forma en que ellos se alejan con respecto a cierto valor, que, generalmente, es la media aritmética.

RANGO

El rango lo estudiamos ya en el tema relativo a las tablas de distribución.

Recordemos:
Rango de un conjunto de datos numéricos es la diferencia entre el mayor y el menor de ellos.

Ejemplo: Un alumno obtuvo las siguientes notas parciales en Matemática: 2 ; 3,9 ; 5 ; 5,9 ; 6,2.
Calculemos el rango.

Rango: 6,2 – 2 = 4,2

¿Qué significado tiene el rango de notas 4,2 respecto de las notas de otro alumno cuyo rango es 2,1?

En el primer caso las notas están más dispersas que en el segundo. No sabemos en qué caso son mejores; Para determinarlo debemos disponer de más información.

LA DESVIACIÓN MEDIA

La desviación de un número con respecto a la media aritmética $\bar{x}$ está dada por la diferencia: $d = x - \bar{x}$ (La suma de las desviaciones de todos los datos con respecto a su media aritmética es cero.)

La desviación media de n datos numéricos $x_1, x_2, \dots x_n$ es la media aritmética de los valores absolutos de las desviaciones de todos los datos con respecto a $\bar{x}$. La designaremos por DM.

$$DM = \frac{\sum_{k=1}^{n} \left| x_k - \bar{x} \right|}{n}$$

Ejemplo1:

Consideremos las notas de Matemática del ejemplo anterior: 2; 3,9; 5; 5,9 y 6,2.
Su media aritmética es $\bar{x}$ = 4,6.

Si calculamos la diferencia de una nota con la media aritmética $\bar{x}$ = 4,6 tendremos la desviación de la nota con respecto a $\bar{x}$.

Las desviaciones de todas las notas con respecto a $\bar{x}$ = 4,6 se indican en la tabla siguiente:

Nota x	Desviación $x - \bar{x}$
2,0	– 2,6
3,9	– 0,7
5,0	0,4
5,9	1,3
6,2	1,6

Sumemos las desviaciones de todas las notas relativas a su media aritmética.
(-2,6) + (-0,7) + 0,4 + 1,3 + 1,6 = 0

Calculemos ahora la media aritmética de los valores absolutos de las desviaciones del ejemplo anterior:

$$\frac{|-2{,}6| + |-0{,}7| + |0{,}4| + |1{,}3| + |1{,}6|}{6} = 1{,}32$$

El valor 1,32 es la desviación media de todas las notas dadas.

Ejemplo 2:

El procedimiento de cálculo, aplicado a la tabla de distribución de frecuencias de los puntajes de P.S.U. con $\bar{x} = 614$ (aprox. al entero) es el siguiente.

Puntaje	Marca de clase (x)	Desviación $\lvert x-\bar{x}\rvert$	Frecuencia (f)	$f\cdot\lvert x-\bar{x}\rvert$
350 – 400	375	239	4	956
400 – 450	425	189	6	1134
450 – 500	475	139	9	1251
500 – 550	525	89	20	1780
550 – 600	575	39	31	1209
600 – 650	625	11	80	880
650 – 700	675	61	42	2562
700 – 750	725	111	10	1110
750 – 800	775	161	8	1288
800 – 850	825	211	2	422
			Σ = 212	Σ = 12592

$\sum f = 212$ y $\sum f\cdot\lvert x-\bar{x}\rvert = 12592$, entonces la desviación media es:

$$\text{DM} = \frac{\sum f\cdot\lvert x-\bar{x}\rvert}{\sum f} = \frac{12592}{212} = 59{,}396 \approx 59{,}4 \text{ puntos}$$

Podemos decir que los puntajes se desvían, en Promedio, 59,4 puntos con respecto a la media. Hay que considerar que algunos puntajes son inferiores a ella y otros superiores.

Si los puntajes estuvieran más agrupados en torno a $\bar{x}$, es decir, menos dispersos, el valor de DM sería menor

DESVIACIÓN TÍPICA O ESTÁNDAR

Otra importante medida de dispersión es la desviación típica, que designamos con la letra **S**.

La desviación típica o estándar expresa el grado de dispersión de los datos con respecto a $\bar{x}$ y corresponde a la raíz cuadrada de la media del cuadrado de las desviaciones de dichos datos con respecto a su media aritmética.

$$s=\sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}\left(x-\bar{x}\right)^2}{n}} \quad \text{o bien} \quad s=\sqrt{\frac{\sum\left(x-\bar{x}\right)^2}{n}} \text{ en forma resumida}$$

Ejemplos:

1) Calculemos la desviación típica de las siguientes notas de Matemática:

Notas: 2; 3,9; 5; 5,9; 6,2

$\bar{x} = 4{,}6$

$$s=\sqrt{\frac{(2-4{,}6)^2+(3{,}9-4{,}6)^2+(5-4{,}6)^2+(5{,}9-4{,}6)^2+(6{,}2-4{,}6)^2}{5}}$$

$$s=\sqrt{\frac{(-2{,}6)^2+(-0{,}7)^2+(0{,}4)^2+(1{,}3)^2+(1{,}6)^2}{5}}$$

$$s=\sqrt{\frac{6{,}76+0{,}49+0{,}16+1{,}69+2{,}56}{5}}=\sqrt{\frac{11{,}66}{5}}=\sqrt{2{,}332}\approx 1{,}53$$

En el ejemplo, la nota menor es 2 y se encuentra casi 1,7 desviaciones típicas por debajo de $\bar{x}$, que es 4,6.

2) Calculemos la desviación típica s de las siguientes notas:

5,2 ; 4,9; 5,0; 5,1; 5,2; 5,3; 4,9; 5,2

Calculamos: $\bar{x} = 5{,}1$; $s=\sqrt{\frac{0{,}16}{8}}=\sqrt{0{,}02}\approx 0{,}14$

Este valor es considerablemente menor que s = 1,53 del ejemplo anterior. se debe a que ahora los datos son más homogéneos que en la otra distribución; Presentan escasa dispersión con respecto a su media.

DESVIACIÓN TÍPICA DE DATOS AGRUPADOS

En una distribución de frecuencias en la que los intervalos son de igual tamaño Podemos aplicar el método abreviado para el cálculo de la desviación típica.

La fórmula para datos no agrupados $s=\sqrt{\frac{\sum\left(x-\bar{x}\right)^2}{n}}$

Si los datos tienen frecuencias f, Se expresa: $s=\sqrt{\frac{\sum f\cdot\left(x-\bar{x}\right)^2}{n}}$

Consideremos los puntajes de P.S.U. correspondientes a los 212 alumnos del ejemplo anterior y calculemos la desviación estándar. ($\bar{x}$ = 614)

Puntaje	Marca de clase (x)	Frecuencia (f)	Desviación $x-\bar{x}$	$(x-\bar{x})^2$	$f\cdot(x-\bar{x})^2$
350 – 400	375	4	– 239	57121	228484
400 – 450	425	6	– 189	35721	214326
450 – 500	475	9	– 139	19321	173889
500 – 550	525	20	– 89	7921	158420
550 – 600	575	31	– 39	1521	47151
600 – 650	625	80	11	121	9680
650 – 700	675	42	61	3721	156282
700 – 750	725	10	111	12321	492840
750 – 800	775	8	161	25921	207368
800 – 850	825	2	211	44521	89042
		Σ = 212		Σ = 208210	Σ = 1407852

$$s=\sqrt{\frac{\sum f\cdot(x-\bar{x})^2}{n}}=\sqrt{\frac{1407852}{212}}=\sqrt{6640{,}811321}=81{,}49117327\approx 81{,}49$$

Ejercicios medidas de dispersión

1) Calcular media aritmética, mediana y moda; además el rango, desviación media y desviación estándar para la siguiente distribución

x_i	f
5	3
10	7
15	5
20	3
5	2

2) Calcular rango, desviación media y desviación para los datos de la siguiente distribución

x	f
0–100	90
100–200	140
200–300	150
300-800	120

3) Sumando 5 a cada número del conjunto 3, 6, 2, 1, 7, 5, obtenemos 8, 11, 7, 6, 12, 10. Probar que ambos conjuntos de números tienen la misma desviación típica pero diferentes medias ¿cómo están relacionadas las medias?

4) Multiplicando cada número 3, 6, 2, 1, 7 y 5 por 2 y sumando entonces 5, obtenemos el conjunto 11, 17, 9 7, 19 15. ¿Cuál es la relación entre la desviación típica de ambos conjuntos? ¿Y entre las medias?