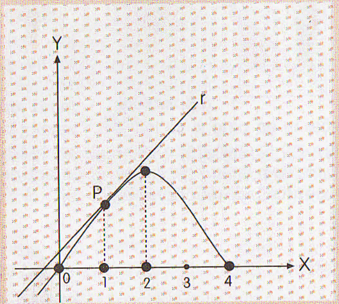
Un profesor en apuros...

Jesús A. Pérez Sánchez - ULA. Mérida

Aquella semana el profesor Beremís estaba extrañando la demora de sus alumnos, en entregar la solución de la acostumbrada tarea de Matemática. El la había propuesto un poco antes de viajar a un Congreso sobre la Enseñanza de la Geometría y ahora, ansiaba ver las respuestas de sus dedicados estudiantes. Aunque un tanto retrasados, éstos, finalmente se presentaron y, enseguida, fue notorio que sus rostros no reflejaban el entusiasmo habitual.

Al indagar sobre el motivo de ello, el Prof. Beremís se enteró de que no habían podido resolver cierto problema al cual parecía que le faltaba un dato. De esta forma, el Prof. se sintió en un aprieto. El era muy esmerado en la elaboración de los ejercicios a proponer y, si bien, aquellos días había estado bastante atareado y no verificó todos los detalles de los problemas, estaba seguro de haber proporcionado todos los elementos necesarios para la solución de los mismos. Sin más preámbulo, quiso saber cuál era la dificultad. Se trataba de lo siguiente:

"Dada la parábola de la figura, hallar la intersección de la recta r (tangente a la curva, en P) con eje OX".



El argumento fundamental del grupo estudiantil era que, sólo con la información contenida en la figura, no era posible hallar la ecuación de la parábola y, por ende, tampoco se podía encontrar la ecuación de r. El Profesor escuchó atentamente, la siguiente explicación:

"La ecuación general de la parábola es: $Y = ax^2 + bx + c$ con a, b, c, constantes, a ser determinadas usando los datos indicados en la figura. Seguro estamos de que $a \neq 0$ y, más precisamente, que $a<0$.

Por otro lado, como la curva pasa por el origen de coordenadas, resulta $c = 0$. Luego, la ecuación de la parábola toma la forma: $Y = ax^2 + bx$

También, como el punto (4, 0) está en la curva, se cumple:
$0 = 16a + 4b$, o sea, $b = -4a$

De ahí que, sería interesante obtener **"otra"** igualdad (la cual involucre a dichas constantes) para formar un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, del cual, en caso de ser compatible y determinado, obtendríamos los valores de a y b. Es oportuno, entonces, que usemos otra pista indicada en el dibujo: la abscisa del vértice de la parábola es igual a 2. Pero, sabemos que la abscisa del vértice de la parábola $Y = ax^2 + bx + c$, es $-\frac{b}{2a}$. Así que, en nuestra situación conseguimos: $-\frac{b}{2a} = 2$ que no es otra cosa que: $b = -4a$.

Entonces, no aparece una **"nueva"** relación entre a y b, por lo cual concluimos que: "la ecuación de la parábola es: $Y = ax^2 - 4a$, con $a \neq 0$, desconocida".

El Prof. Beremís reconoció que sus pupilos tenían razón: con la información suministrada no era posible hallar el valor de a. Entonces, con ese espíritu animado que lo caracterizaba, les propuso aprovechar el momento para repasar el concepto de recta tangente. Enseguida comenzó: "Sea r, una recta (no vertical) de pendiente m y que pasa por el punto (x_1, y_1) de la curva dada por: $Y = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$. Supongamos, además, que (x_1, y_1) no coincide con el vértice de la parábola (en otras palabras, $m \neq 0$). La ecuación de r es: $y - y_1 = m(x - x_1)$.

Nos proponemos hallar m, de forma que el **único** punto común a r y a la parábola, sea el (x_1, y_1).

La recta r, con tal m y pasando por (x_1, y_1) es lo que denominamos la recta tangente a la parábola en su punto (x_1, y_1). Cabe señalar que con los recursos del análisis infinitesimal (concretamente, con el concepto de derivada) se llega a una noción de recta tangente menos restrictiva.

Por lo pronto, tenemos el sistema $\begin{cases} Y = ax^2 + bx + c \\ y - y_1 = m(x - x_1) \end{cases}$

cuya única solución deberá ser el punto (x_1, y_1). Despejando y en la segunda ecuación, sustituyéndola luego, en la primera y usando que: $y_1 = ax_1^2 + bx_1 + c$, después de agrupación y factorización, obtenemos:

$$(x - x_1) . [a(x + x_1) + b - m] = 0 \quad (*)$$

Nuestro anhelo se manifiesta, ahora, así: la única solución de la ecuación (*) debe ser $x = x_1$

Ello obliga a que sea $m = 2ax_1 + b$

De manera que la ecuación de la susodicha recta tangente es: $y - y_1 = (2ax_1 + b)(x - x_1)$ (**)

Luego, lo solicitado en la tarea es **el valor de x** en (**) correspondiente a $y = 0$. (Llamémoslo x_0).

De (**) obtenemos, entonces, $x_0 = -\frac{y_1}{2ax_1 + b} + x_1$

(Recordar que $m = 2ax_1 + b \neq 0$)

Además, en nuestro caso particular, $x_1 = 1$ e

$y_1 = ax_1^2 + bx_1 = a + b$

Así que, $x_0 = -\frac{a + b}{2a + b} + 1$

En este momento, al Prof. Beremís le brillaron los ojos y su expresión fue de mucha alegría, pues percibió que podía resolver el problema, a pesar de no conocer el valor de a. En efecto, como $b = -4a$, sustituyendo se obtiene: $x_0 = -\frac{a - 4a}{2a - 4a} + 1 = -\frac{1}{2}$

Como corolario, cada rostro mostró una sonrisa.

¡No era para menos!